SEZIONI

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array} \qquad \Gamma E = \{\text{sezioni}\} \text{ è un } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-modulo}$$

$\mathbb{R}$-spazio vettoriale

<u>Def</u>: $S \subseteq B$ sottoinsieme. Una SEZIONE su S è $s : S \to E$ liscia t.c. $\pi \circ s = id_S$

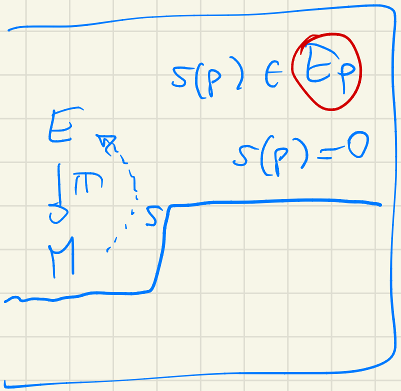
<u>Prop</u>: Ogni sezione su S liscia, definita su S chiuso, si estende a sezione su B.

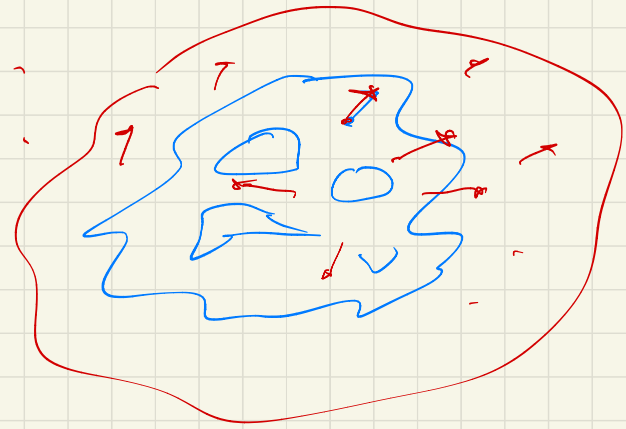
Si può chiedere anche $s(p) = 0$ $\forall p \notin U(S)$ aperto.

<u>Oss</u>: Se $U \subseteq B$ trivializzante

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[u, dashed, bend right, "s"'] \end{tikzcd} \qquad s(p) = (p, s'(p)) \qquad s' : U \to \mathbb{R}^k$$

Cor: $S \subseteq M$ chiuso. Qualsiasi campo vettoriale liscio su S si estende a campo su M





Ogni fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} B$ ha la SEZIONE NULLA

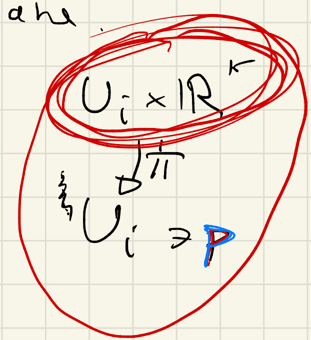
$\sigma(p) = 0 \quad \forall p \in B$

Prop: Ogni fibrato vettoriale ha una metrica Riemanniana

dim: $E \xrightarrow{\pi} M^n$

$\{U_i\}_{i \in I}$ aperti trivializzanti

$\{\rho_i\}_{i \in I}$ partizione unità



Su U_i prendo $g_i(p)$ Euclideo

$E_p = \mathbb{R}^k$ $g_i(p)$

$g_i(p)(x,y) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$

Definisco g metrica Riemanniana su E

DEF + $\rightarrow$ $g(p) = \sum_{i \in I} \rho_i(p) g_i(p)$ DEF +

$g_i(p) \in S^2 E_p$

- è ben definito $g \in \Gamma(S^2 E)$

$g(p) \in S^2 E_p$

Comb. lin. a coeff >0 di prod. sc. def + è def +

$\square$

Lorentziano = segn. $(n, -1)$

Cor: $E \xrightarrow{\pi} M$ isomorfo a $E^* \xrightarrow{\pi} M$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E^* \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "id"] & M \end{tikzcd}$$

dim: Prendo g metrica Riem. su E $g(p) : E_p \xrightarrow[\sim]{F_p} E_p^*$

FRAME

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ B \end{tikzcd} \quad \operatorname{rk} E = k, \quad \dim B = n$$

Def: Un FRAME è un insieme di k sezioni: $s_1, \dots, s_k \in \Gamma E$

t.c. $s_1(p), \dots, s_k(p) \in E_p$ siano indip. $\forall p \in B$

Prop: $\exists$ frame $\Leftrightarrow$ E è banale

dim: $\boxed{\Rightarrow}$ $s_1, \dots, s_k \in \Gamma E$ frame

$$\begin{tikzcd} B \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "F"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ B \arrow[r, "id"] & B \end{tikzcd}$$

$$F(p, x) = x_1 s_1(p) + \dots + x_k s_k(p)$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{tikzcd} B \times \mathbb{R}^k \arrow[d] \\ B \end{tikzcd} \qquad s_i(p) = (p, e_i)$$

$\square$

Oss: S^{2n}, TS^{2n} non ha sezioni mai nulle $\Rightarrow$ non è banale

S^{2n+1}, TS^{2n+1} ha sezione mai nulla

Es: $X\underbrace{(x_1, \dots, x_{2n+2})} = \underbrace{(x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots)}$

Es: Trovare frame per TS^3

Oss: Su un aperto trivializzante $\exists$ sempre un frame

Def: Se $\begin{matrix} E \\ \downarrow^{\pi} \\ B \end{matrix}$ ha metrica Riem. un frame $s_1, \dots, s_k$ è ORTONORMALE se $g(s_i(p), s_j(p)) = \delta_{ij}$ $\forall p, i, j$

Prop: Se E è banale, ha frame ortonormale

dim: banale $\Rightarrow$ ha frame $\underbrace{s_1, \dots, s_k}$ $\xrightarrow[\text{Gram-Schmidt}]{}$ $\overbrace{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k}$

CAMPI VETTORIALI

M varietà $\qquad X \in \Gamma TM \qquad \mathfrak{X}(M) = \Gamma TM$

In carta: $M \supseteq U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^n$

X

LO CHIAMO SEMPRE X

$V \subseteq \mathbb{R}^n \qquad X(p) = X^i(p)\, e_i$

numeri

$v = v^i v_i$

$$\boxed{X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

$f : M \to N$ liscia

induce $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi"'] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

f diffeo $\Rightarrow$ df isom di fibrati

Cambio coordinate

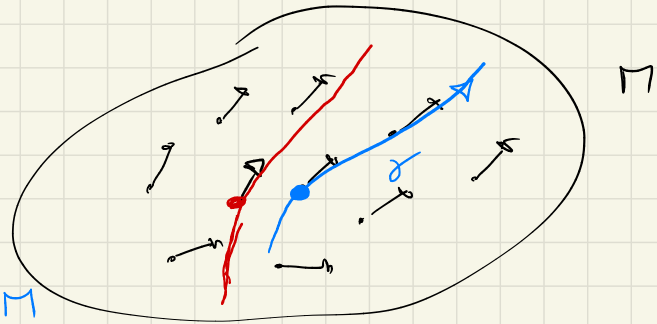
$U \xrightarrow{\varphi'} \bar{V} \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$

$$X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \qquad X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} = \underbrace{\bar{X}^i \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}}_{= X^j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

CURVE INTEGRALI

X campo vettoriale su M



Def: Una CURVA INTEGRALE è

$\gamma : I \to M$ t.c.

$$\forall t \in I \quad \boxed{X(\gamma(t)) = \gamma'(t)} \in T_{\gamma(t)} M$$

Prop: $\forall p \; \exists!$ curva integrale massimale $\gamma_p : I_p \to M$ t.c.

$\gamma_p(0) = p$

non è estendibile ad una curva integrale con dominio più grande

dim: In carte

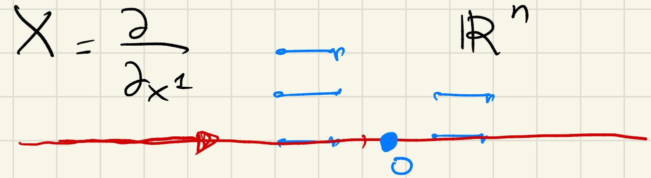
$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

$\overset{\text{liscio}}{X}(\gamma(t)) = \gamma'(t)$

PROBLEMA DI CAUCHY $\to \exists$ loc. unica sol. liscia

Non è detto che $I = \mathbb{R}$

Esempio: $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$



$\gamma_p(t) = p + t e_1$

$M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Def: $X \in \mathfrak{X}(M)$ è COMPLETO se $I_p = \mathbb{R}$ $\forall p \in M$

FLUSSO

Teo: $\exists!$ $M \times \{0\} \subseteq U \subseteq M \times \mathbb{R}$ aperto, $\Phi : U \to M$ liscia t.c.

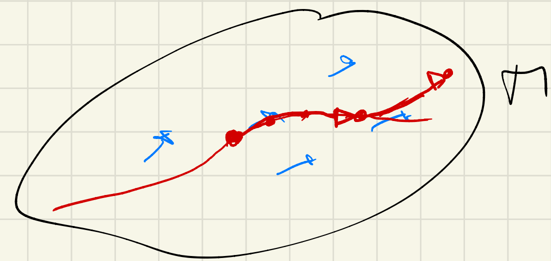
$$I_p = \{ t \in \mathbb{R} \mid (p,t) \in U \}, \quad \Phi(p,t) = \gamma_p(t)$$

dim: Dipendenza liscia di $\gamma_p(t)$ sia da p che da t $\square$

Oss: X completo $\iff$ $U = M \times \mathbb{R}$

Lemma: Se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ allora X è completo

dim:



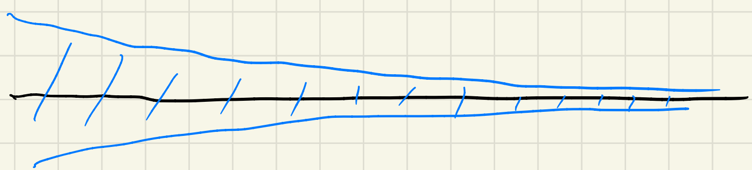
$(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_p$

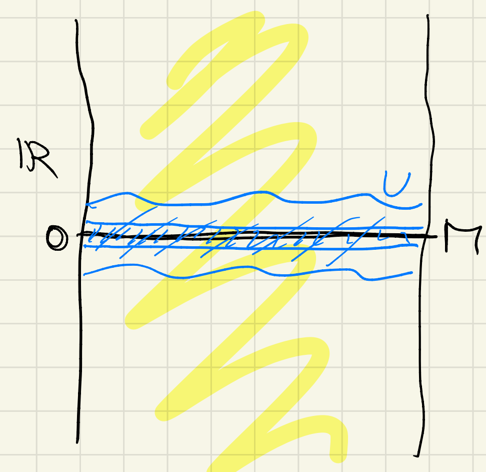
$\forall p \in M$

$\square$

Cor: Se M cpt, allora X completo

dim:





$\square$

Se X completo $\quad \Phi(p,t) \in M \quad \forall p \in M, \ \forall t \in \mathbb{R}$

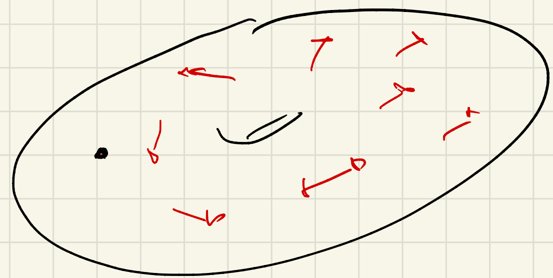
Prop: $\Phi_t : M \to M \qquad \Phi_t(p) = \Phi(p,t)$

è un diffeo. Inoltre $\underbrace{\Phi_{t+u} = \Phi_t \circ \Phi_u}_{\text{ovvio}} \Rightarrow \Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$

$\Phi_0 = id$

Oss: $t \mapsto \Phi_t$ omomorfismo

$\mathbb{R} \to \mathrm{Diffeo}(M)$

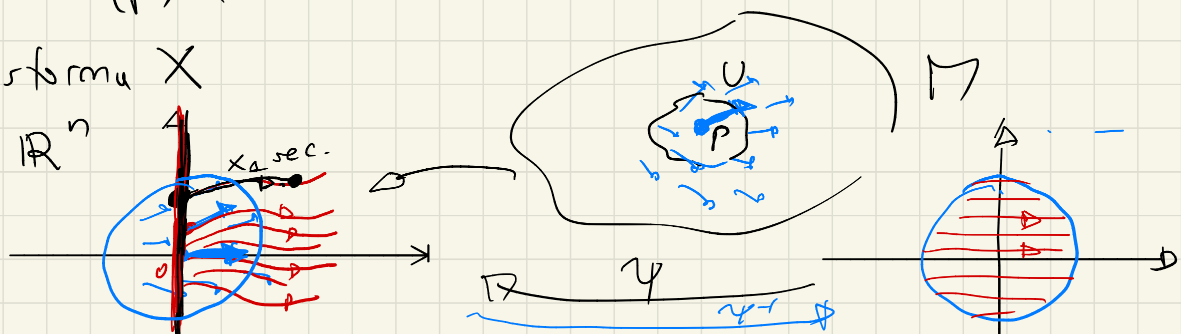


RADDRIZZAMENTO DI CAMPI

Prop: $X \in \mathfrak{X}(M) \quad X(p) \neq 0$

$\exists$ carta che trasforma X in $\frac{\partial}{\partial x_1}$ su $\mathbb{R}^n$

dim.



In carta $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}$

Sia Φ_t flusso di X

NOTA: $\Phi_t(p) = \Phi(t,p)$

non è sempre definito però lo è se t e p sono piccoli

$$\underbrace{\psi(x_1, \dots, x_n)} = \Phi_{x_1}(0, \underbrace{x_2, \dots, x_n})$$

ben det. se $x_1, \dots, x_n$ piccoli

$\psi : B(\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$

$d\psi_0 = id$ $\qquad \psi(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$

$\Downarrow$ $\qquad (d\psi_0)(e_1) = e_1$

ψ è diffeo loc in 0

ψ^{-1} è la carta cercata

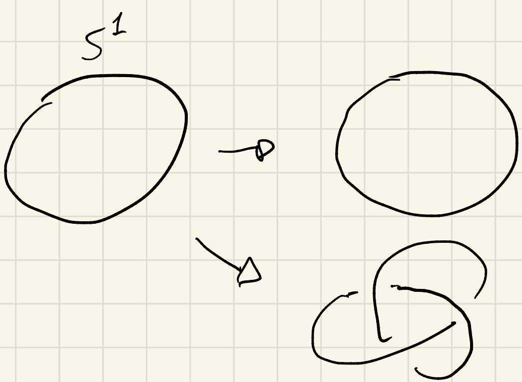
ISOTOPIA AMBIENTE

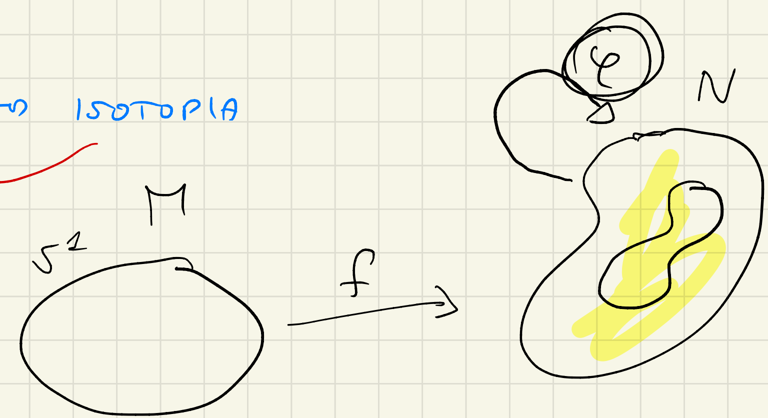
Def: M, N varietà $f, g : M \hookrightarrow N$ embedding. Una ISOTOPIA è una $F : M \times \mathbb{R} \to N$ t.c. $F_0 = f$, $F_1 = g$ F_t emb.

Def N varietà. Una ISOTOPIA AMBIENTE è una isotopia F fra $id : N \to N$ e un diffeo $\varphi : N \to N$ t.c. F_t diffeo $\forall t$

ISOTOPIA AMBIENTE $\to$ ISOTOPIA

?

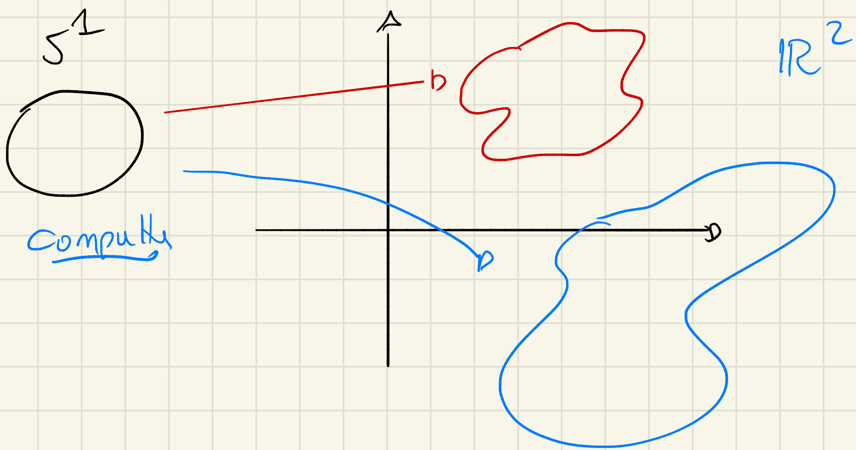




Se F_t è isot. amb. di N e $f: M \hookrightarrow N$ emb.

allora $G_t = F_t \circ f$ è isotopia di f

$t=0 \quad G_0 = f \qquad t=1 \quad G_1 = F_1 \circ f$, $F_1 = \varphi$



Teo: M cpt, $f, g: M \hookrightarrow N$ emb. isotopi $\Rightarrow \exists$ isotopia ambiente di N che li collega

dim: $F_t : M \to N$ emb. $\qquad F_0 = f, \quad F_1 = g \qquad F: M \times \mathbb{R} \to N$

$S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

Y su $N\times\mathbb{R}$
su S è $dG\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$
e fuori da U
è $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\underline{G} : M\times\mathbb{R} \longrightarrow N\times\underline{\mathbb{R}}$$
$$(p,t) \longmapsto (F(p,t), t)$$

$$(0,1) = \frac{\partial}{\partial t}$$

- G iniettiva
- G immersione

$$T_{(p,t)} M\times\mathbb{R} = T_pM \times \mathbb{R}$$
$$T_{(q,t)} N\times\mathbb{R} = \underline{T_qN \times \mathbb{R}}$$

$$dG_{(p,t)} = \left(\begin{array}{c|c} dF_t & ? \\ \hline 0 - 0 & 1 \end{array}\right)$$

dF_t iniett. $\Rightarrow dG_{(p,t)}$ iniett.

- G <u>embedding</u> perché è propria (si usa M cpt)

$K \subseteq N\times\mathbb{R}$ $\qquad$ $K \subseteq N\times[-C, C]$

chiuso $G^{-1}(K) \subseteq \underbrace{M \times [-C, C]}_{2}$ cpt $\Rightarrow G^{-1}(K)$ cpt

- Quindi $\mathrm{Im}(G) \subseteq N \times \mathbb{R}$ è sottovarietà

Chiamo Y il campo su $\mathrm{Im}(G)$ ottenuto spostando $\frac{\partial}{\partial t}$ in avanti tramite G

Ora considero solo $Y\big|_{G(M \times [0,1]) = S} = Y$

Estendo Y ad un campo su $N \times \mathbb{R}$ che sia nullo fuori da un intorno U di S

Modifico Y in modo che l'ultima coordinata sia di forza 1

- X è completo: $\Phi : N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R}$

$$(q, t, u) \longmapsto (\Phi_1(q,t,u), \Phi_2(q,t,u))$$

$$H : N \times \mathbb{R} \to N$$

$$(q, u) \longmapsto \Phi_1(q, 0, u)$$